NOUVEAU PROGRAMME

19

Probabilité sur un ensemble fini

Savoir

Probabilité d'un événement

On considère une expérience aléatoire ayant un nombre n d'**éventualités** (ce sont les résultats possibles). Un **événement** A est un ensemble constitué avec une ou plusieurs éventualités.
La **probabilité** qu'une éventualité soit réalisée est un nombre compris entre 0 et 1. Ce nombre correspond à la fréquence théorique de cette éventualité si on répétait l'expérience un très grand nombre de fois.
La probabilité de l'événement A est la somme des probabilités des éventualités qui le constituent.
Un événement impossible a pour probabilité 0.
Un événement certain a pour probabilité 1.
Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les probabilités associées aux n éventualités de l'expérience aléatoire, alors $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
Soit $\overline{A}$ l'événement contraire de A ; sa probabilité est $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
Lorsque les éventualités ont la même probabilité, on est en « **situation d'équiprobabilité** ». Si un événement A contient m éventualités, alors la probabilité de A est :

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{nombre de résultats favorables à } A}{\text{nombre de résultats possibles}}.$$

Réunion et intersection de deux événements

L'**intersection** de deux événements A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble constitué des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B.
La **réunion** de deux événements A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble constitué des éventualités qui appartiennent soit à A, soit à B, soit à $A \cap B$.
Les probabilités de l'intersection et de la réunion des événements A et B sont liés par la formule $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

Savoir-faire

Déterminer la probabilité d'un événement

Dans une classe de seconde, il y a 11 filles et 23 garçons. Le professeur de mathématiques interroge un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il interroge une fille ?
L'expression « au hasard » signifie qu'il y a équiprobabilité des éventualités. Soit F l'événement « le professeur interroge une fille ». Le nombre de résultats possibles est 34. Le nombre d'éventualités de F est 11. Donc la probabilité de F est $p(F) = \frac{11}{34} \approx 0{,}32$.
La probabilité d'interroger une fille est environ 0,32.

Exploiter la formule reliant la réunion et l'intersection de deux événements

On lance un dé « parfait ». La probabilité d'obtention de chacune des six faces est $\frac{1}{6}$. Soit A et B les événements « le numéro est pair » et « le numéro est un multiple de 3 ».
Calculer la probabilité des événements A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.
$A = \{2 ; 4 ; 6\}$, $B = \{3 ; 6\}$, $A \cap B = \{6\}$;
donc $p(A) = \frac{3}{6}$, $p(B) = \frac{2}{6}$, $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$, soit $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

Faire

1 On donne les résultats d'une simulation de 200 lancers d'un dé à six faces : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Chiffres	1	2	3	4	5	6	
Effectifs	32	37	28	31	40	32	200

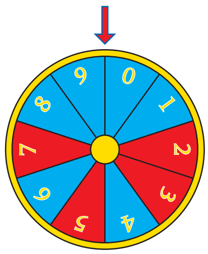
a. Calculer la fréquence de sortie de chacun des numéros. (Vous pouvez refaire une simulation.)

b. Quelle serait la fréquence théorique de sortie de chaque numéro en situation d'équiprobabilité ?

c. Soit B l'événement « le numéro est au moins égal à 2 ».
Calculer la probabilité de B.

2 On dispose des 12 figures (valets, dames et rois dans les quatre couleurs, carreau, cœur, pique et trèfle) d'un jeu de 32 cartes. On tire une carte au hasard.
Soit A l'événement « la carte tirée est un cœur » et B l'événement « la carte tirée est un roi ».
Calculer la probabilité des événements A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

3 Les 10 secteurs de ce groupe ont un angle au centre de 36°.



a. On fait tourner le disque. Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 8 ?

b. Soit A et C les événements « nombre premier » et « le numéro obtenu est impair ».
Calculer la probabilité de A, C, $A \cap C$ et $A \cup C$.

c. Le disque est coloré avec deux couleurs : les secteurs correspondants à des nombres premiers sont en rouge, les autres sont bleus.
On fait tourner deux fois le disque.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux secteurs rouges ?
Quelle est la probabilité d'obtenir un secteur de chaque couleur ?

4 Dans une classe de seconde de 34 élèves, il y a 11 filles et 23 garçons.
On donne la répartition en pourcentage des filles et des garçons de cette classe selon leur choix de deuxième langue vivante (anglais, allemand ou espagnol) :
– parmi les filles, 9 % ont choisi l'anglais, 64 % l'allemand et 27 % l'espagnol ;
– parmi les garçons, 13 % ont choisi l'anglais, 39 % l'allemand et 48 % l'espagnol.

a. Compléter le tableau suivant.

	Anglais	Allemand	Espagnol	Total
Filles				11
Garçons				23
Total				34

b. On considère un élève au hasard.
Soit les événements :
F : « cet élève est une fille » ;
G : « cet élève est un garçon » ;
E : « cet élève a choisi l'espagnol ».
Calculer la probabilité des événements F, G, E et $\overline{E}$.

c. Soit A et B les événements « l'élève est une fille qui a choisi l'allemand » et « l'élève est un garçon qui a choisi l'allemand ».
Peut-on affirmer que la probabilité de A est plus élevée que la probabilité de B ? Justifier votre réponse.

5 Soit A et B deux événements d'une expérience aléatoire tels que $p(A) = 0{,}6$ et $p(B) = 0{,}7$.
Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des propositions suivantes. Inventer un exemple concret compatible avec cette expérience aléatoire.

a. C'est impossible !

b. $p(A \cup B) > 1$

c. $p(A \cap B) \geqslant 0{,}3$

d. $p(\overline{A}) = 0{,}4$

6 On choisit au hasard un nombre entier inférieur strictement à 500.

a. Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit un carré parfait ?

b. Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit un cube parfait ?

c. Quelle est la probabilité pour que ce nombre ne soit ni un carré ni un cube ?

Voir les corrigés

Probabilité sur un ensemble fini

1 **a.**

Chiffres	1	2	3	4	5	6
Effectifs	32	37	28	31	40	32
Fréquences	0,160	0,185	0,140	0,155	0,200	0,160

b. $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$.

c. $\overline{B} = \{1\}$; $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

2 Il y a 3 cœurs, donc $p(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; il y a 4 rois, donc $p(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

$A \cap B$ contient seulement le roi de cœur, donc $p(A \cap B) = \frac{1}{12}$.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = 0{,}5$.

3 **a.** Situation d'équiprobabilité ; $p(8) = 0{,}1$.
b. $A = \{2 ; 3 ; 5 ; 7\}$, $C = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9\}$, $A \cap C = \{3 ; 5 ; 7\}$;
$p(A) = 0{,}4$; $p(C) = 0{,}5$; $p(A \cap C) = 0{,}3$; $p(A \cup C) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}6$.
c. A : « obtenir un secteur rouge » ; B : « obtenir un secteur bleu ».
À chaque tour de disque : $p(A) = 0{,}4$ et $p(B) = 0{,}6$.
On dessine un arbre donnant toutes les possibilités :

- A
  - A → deux rouges
  - B → un rouge et un bleu
- B
  - A → un bleu et un rouge
  - B → deux bleus

Attention : les 4 résultats ne sont pas équiprobables. On justifiera dans les classes suivantes le raisonnement de « bon sens » suivant : la probabilité d'avoir deux secteurs rouges est $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$; la probabilité d'avoir deux secteurs bleus est $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$; donc la probabilité d'avoir un secteur de chaque couleur est $1 - 0{,}16 - 0{,}36 = 0{,}48$.

4 **a.**

	Anglais	Allemand	Espagnol	Total
Filles	1	7	3	11
Garçons	3	9	11	23
Total	4	16	14	34

b. $p(F) = \frac{11}{34} \approx 0{,}32$; $p(G) = \frac{23}{34} \approx 0{,}68$;

$p(E) = \frac{14}{34} = \frac{7}{17} \approx 0{,}41$; $p(\overline{E}) = \frac{10}{17} \approx 0{,}59$.

c. 64 % des filles et 39 % des garçons ont choisi allemand. Mais sur l'ensemble de la classe :
$p(A) = \frac{7}{34} \approx 0{,}21$ et $p(B) = \frac{9}{34} \approx 0{,}26$. La probabilité de B est plus élevée que la probabilité de A.

5 **a.** Faux. Dans une classe, on peut avoir 60 % des élèves lisant au moins un journal par semaine et 70 % s'intéressant au football et 50 % faisant les deux.
b. Faux. La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.
c. Vrai. On utilise la formule $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.
Les informations $p(A) + p(B) = 1{,}3$ et $p(A \cup B) \leqslant 1$ impliquent $p(A \cap B) \geqslant 0{,}3$.
d. Vrai. On utilise la formule $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

6 On est sous l'hypothèse d'équiprobabilité. Le nombre de cas possibles est 500, car il y a 500 entiers compris entre 0 et 499.
a. Soit A l'ensemble des carrés parfaits. $A = \{0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 169 ; 196 ; 225 ; 256 ; 289 ; 324 ; 361 ; 400 ; 441 ; 484\}$.
A contient 23 éventualités. Donc $p(A) = \frac{23}{500} = 0{,}046$.
b. Soit B l'ensemble des cubes parfaits. $B = \{0 ; 1 ; 8 ; 27 ; 64 ; 125 ; 216 ; 343\}$.
B contient 8 éventualités. Donc $p(B) = \frac{8}{500} = 0{,}016$.
c. $A \cap B = \{0 ; 1 ; 64\}$. Donc $p(A \cap B) = \frac{3}{500} = 0{,}006$.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}046 + 0{,}018 - 0{,}006 = 0{,}058$.
La probabilité pour que ce nombre ne soit ni un carré ni un cube est $1 - 0{,}058 = 0{,}942$.